UDK: 004:51 Stručni rad

FIGURATIVNI BROJEVI KAO SREDSTVO ZA PREZENTACIJU PARADIGMI I RAZVIJANJE KONSTRUKTIVNOG MIŠLJENJA

FIGURATIVE NUMBERS AS A TOOL FOR PRESENTATION PARADIGMS AND DEVELOPMENT CONSTRUCTIVE OPINIONS

Miroslava Mihajlov Carević[1], Lazar Kopanja[2], Nebojša Denić[3]
[1]*Fakultet za metematiku i računarske nauke, Alfa BK Univerzitet,Beograd*
[2]*Fakultet za metematiku i računarske nauke, Alfa BK Univerzitet,Beograd*
[3]*Fakultet za metematiku i računarske nauke, Alfa BK Univerzitet, Beograd*

[1]miroslava.carevic.mihajlov@alfa.edu.rs, [2]lazar.kopanja@alfa.edu.rs,
[3]nebojsa.denic@alfa.edu.rs

Apstrakt: *U ovom radu bavili smo se ispitivanjem sposobnosti učenika šestog i sedmog razreda osnovne škole da uočavanjem zakonitosti rešavaju razne zadatke sa prirodnim brojevima. Konstatacije do kojih smo došli bile su u velikoj meri nezadovoljavajuće. Organizovali smo upoznavanje učenika sa trougaonim i kvadratnim brojevima u cilju razvijanja konstruktivnog mišljenja kod učenika i predstavljanja paradigmi u procesu učenja. U cilju ostvarivanja saradničkog učenja formirane su četvoročlane grupe od učenika različitog nivoa matematičkog znanja. Trougaoni i kvadratni brojevi sa svojom slikovnom prezentacijom i zakonitostima koje važe za njih, učenicima su veoma interesantni i lako razumljivi. Pokazano je da postupci u radu sa ovim brojevima mogu biti korisne paradigme za rad sa nizovima brojeva i takođe doprinose razvijanju konstruktivnog mišljenja kod učenika.*

Ključne reči: *Paradigme, konstruktivizam, saradničko učenje, trougaoni i kvadratni brojevi.*

Abstract: *In this paper, we dealt with the examination of the abilities of students of the sixth and seventh grade to observing the legality solve various tasks with the natural numbers. The findings we reached were largely unsatisfactory. We organized a meeting of students with triangular and square numbers to develop constructive thinking in students and presenting paradigm in the learning process. In order to achieve collaborative learning are formed of four groups of students with different levels of mathematical knowledge. Triangular and square numbers with their pictorial presentation and the laws that apply to them, the students are very interesting and easy to understand. It has been shown that procedures in dealing with these numbers can be useful paradigm for working with arrays of numbers and also contribute to the development of constructive thinking in students.*

Key words: *Paradigms, constructivism, cooperative learning, triangular and square numbers.*

1. UVOD

Paradigme su izuzetno korisne u procesu učenja. One doprinose bržem i lakšem rešavanju problema prebacivanjem na izomorfan problem čije je rešenje poznato. Učenici kojima je ispričana priča o velikom matematičaru Gausu koji je kao dečak od 10 godina uočio zakonitost pomoću koje je brzo i lako izračunao zbir prvih 100 prirodnih brojeva, primenjuju ovaj postupak i brzo izračunavaju zbirove raznih brojeva koji imaju sličnu zakonitost. Po Geštalt teoriji u rešavanju problema ključnu ulogu ima razumevanje i sagledavanje problemske situacije koja se može rešiti uviđanjem odnosa među elementima problemske situacije (King[1], 2007). Trougaoni i kvadratni brojevi sa svojom slikovnom prezentacijom i zakonitostima koje važe za njih, učenicima su veoma interesantni i lako razumljivi a mogu biti veoma dobro sredstvo za prezentaciju paradigmi i razvijanje konstruktivnog mišljenja. U obrazovnom sistemu, učenje kroz rešavanje problema je prihvaćeno kao efikasna paradigma učenja (Wang, Wu, Kinshuk, Chen & Spector[2], 2013).

Tokom višegodišnjeg rada sa učenicima uvideli smo da je vizuelno-logički pristup rešavanju matematičkih problema nedovoljno zastupljen u nastavi matematike. Organizovali smo ispitivanje sposobnosti učenika šestog i sedmog razreda osnovne škole da uočavanjem zakonitosti rešavaju razne zadatke sa prirodnim brojevima. Učenici osmog razreda su bili izuzeti iz ovog ispitivanja zbog njihove usredsređenosti na pripremu za polaganje Završnog ispita na kraju osmogodišnjeg obrazovanja. Ispitivanje je izvršeno u osnovnoj školi „Rade Drainac“ u Beogradu. Obuhvaćeno je 9 odeljenja 6. razreda (272 učenika) i 8 odeljenja 7. razreda (243 učenika). Konstatacije do kojih smo došli bile su u velikoj meri nezadovoljavajuće. Veoma mali broj učenika je tačno izračunao zbir prvih 1000 prirodnih brojeva. Još manji broj učenika je umeo da izračuna zbir neparnih brojeva u prvoj stotini brojeva. Ni jednostavni zadaci sa upisivanjem nedostajućeg broja u prazno polje nisu bolje urađeni.

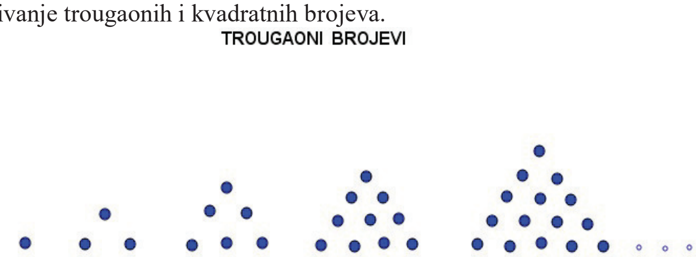
Zbog toga smo organizovali upoznavanje učenika sedmog razreda sa odabranim primerima koji mogu da zastupaju mnoštvo drugih primera i time omoguće učenicima uspešno rešavanje mnogobrojnih problemskih situacija. Takođe nam je težnja bila da razvijamo konstruktivno mišljenje učenika. Konstruktivizam unapređuje intelektualni razvoj učenika, zamena je za memorisanje u učenju i odlična je alternativa tradicionalnim metodama u obrazovanju(Iran-Nejad[3],1995). Prednosti konstruktivizma u nastavnoj praksi ističu i drugi autori (Schcolnik, Kol, Abarbanel[4], 2016; McPhail[5], 2015). U tom cilju odlučili smo da učenike upoznamo sa trougaonim i kvadratnim brojevima očekujući da će im oni biti interesantni, lako prihvatljivi i da će poslužiti kao paradigme u mnogobrojnim zadacima. Trougaoni i kvadratni brojevi su već 26 vekova prisutni u matematici. Slikovni prikaz ovih brojeva omogućava vizuelno zapažanje osobina tih brojeva i time ih čini prikladnim objektima i sredstvima u radu. Od njihovog tvorca Pitagore do savremenog doba njima su se bavili mnogobrojni čuveni matematičari kao što su Diofant Aleksandrijski, Leonardo Pizano Fibonači, Rene Dekart, Pjer Ferma, Blez Paskal, Leonard Ojler, Karl Fridrih Gaus i drugi (Deza & Deza [6], 2012).

2. TROUGAONI BROJEVI KAO PARADIGME

Trougaoni, kvadratni i drugi figurativni brojevi su povezani sa mnogobrojnim klasama pozitivnih celih brojeva kao što su binomni koeficijenti, Pitagorine trojke brojeva, savršeni brojevi, Fibonačijevi brojevi i drugi. Zato je nerazumljivo odsustvo ovih brojeva iz redovne nastave matematike u osnovnom i srednjem obrazovanju u Srbiji. To je bio razlog, motiv, našem izboru trougaonih i kvadratnih brojeva za prezentaciju paradigmi u matematici.
Odabrali smo dva odeljena sedmog razreda kod iste nastavnice matematike (7_4 i 7_8). Učenicima je održano jednočasovno upoznavanje sa ovim brojevima, razlikama među njima i osnovnim zakonitostima a zatim jednočasovno rešavanje raznih zadataka. Tokom oba časa učenici su radili u grupama. Formirane su četvoročlane grupe od učenika različitog nivoa matematičkog znanja (sa izuzetkom jedne tročlane u 7_4 i dve tročlane u 7_8 zbog ukupnog broja učenika u odeljenjima). Po Kagan[7] principu takve grupe su efikasnije u radu jer članovi grupe pomažu jedan drugom u učenju. Za vreme saradničkog učenja, učenici koji su nedovoljno razumeli materiju su postavljali pitanja, učenici koji su je razumeli su im pomagali da shvate i time produbljivali svoje znanje. Saradničko i kooperativno učenje su analizirali mnogobrojni naučnici (Dooly[8],2008; Chai, Lin, So & Cheah[9], 2011). U saradničkom učenju učenici nisu odgovorni samo za svoje učenje već i za učenje drugih članova grupe (Laal & Ghodsi [10], 2012). Prilikom formiranja grupa učenicima je dozvoljeno da se svojevoljno grupišu (po principu različitosti matematičkog znanja u grupi) da bi se ostvarila što bolja saradnička veza u grupi (Dogru & Kalender[11], 2007).

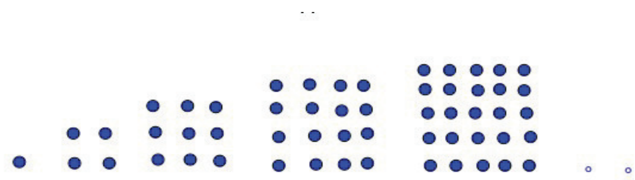
Sadržaj predavanja i vežbanja na časovima je sledeći:

U uvodnom delu časa osvrnuli smo se na Pitagoru i njegovu čuvenu krilaticu „Sve je broj“ zatim na pitagorejsko predstavljanje brojeva likovima trougla i kvadrata. Sledi vizuelno prikazivanje trougaonih i kvadratnih brojeva.



Slika 1. Trougaoni brojevi

Zatim je od učenika zahtevano da popune sledeću tablicu sa ciljem da sami uoče razlike među trougaonim brojevima i razlike među tim razlikama:
Trougaoni brojevi: 1 3 6 10 15 . . .
Razlike među njima: 2 3 (popuniti dalje)
Razlike među razlikama 1 (popuniti dalje)
Nakon uspešnog popunjavanja tablice učenici su upoznati sa kvadratnim brojevima.



Slika 2. Kvadratni brojevi

Od učenika je potom zahtevano, kao u prethodnom delu, da popune sledeću tablicu sa ciljem da sami uoče razlike među kvadratnim brojevima i razlike među tim razlikama:

Kvadratni brojevi: 1 4 9 16 25 . . .
Razlike među njima: 3 5 (popuniti dalje)
Razlike među razlikama 2 (popuniti dalje)

Zatim su učenicima zadati sledeći zadaci:

1) Odrediti 6. po redu trougaoni broj.
2) Odrediti 6. po redu kvadratni broj.

Oba zadatka su sve grupe brzo i tačno rešile.

Nakon diskusije u kojoj je konstatovano da bi sada sa lakoćom mogli napisati prouzvoljno dug niz trougaonih i kvadratnih brojeva, prešli smo na sledeći zadatak:

3) Odrediti 80. po redu trougaoni broj.

Komentari učenika su bili poput: „Uh, ko će da računa do 80 – tog člana“, „Dobro je da niste tražili 1000-ti član“ i slično. Kada im je rečeno da ne moraju odrediti sve trougaone brojeve redom već da pokušaju računskim putem, koristeći razlike među trougaonim brojevima da dođu do rezultata, većina grupa je pokušala ali nije stigla do rešenja.

Zatim im je pokazano rešenje:

Drugi trougaoni broj: $3 = 1 + 2$
Treći: $6 = 1 + 2 + 3$
Četvrti: $10 = 1 + 2 + 3 + 4$
Peti: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
. . .
Osamdeseti: $X = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 80$ tj.

$X = 1 + 2 + 3 + \ldots + 40 + 41 + \ldots + 78 + 79 + 80$
↑_81_↑
↑_________81__________↑
↑____________81______________↑
↑________________ 81 ___________________↑

Pa je $X = 40 \cdot 81 = 3240$.

Zatim su rešavani razni zadaci u kojima je neophodno uočavanje zakonitosti među članovima niza.

4) U nizu kvadratnih brojeva razlika dva susedna člana je 53. Koji su to brojevi?

I u ovom zadatku učenici su imali poteškoća pri rešavanju pa im je pokazano sledeće rešenje:

Drugi kvadratni broj: $4 = 1 + 3$
Treći: $9 = 1 + 3 + 5$
Četvrti: $16 = 1 + 3 + 5 + 7$

Peti: $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

. . .

$Y = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 51$

$X = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 51 + 53 = Y + 53$

$Y = 1 + 3 + 5 + \ldots 25 + 27 + \ldots + 47 + 49 + 51$

↑_52_↑

↑______ 52 ________↑

↑_________52_____________↑

↑____________52__________________↑

Ovih parova ima 13 pa je

$Y = 13 \cdot 52 = 676$ i

$X = 676 + 53 = 729$

Napomena: U trenutku kada je ovo rađeno učenici nisu upoznati sa rastavljanjem izraza $a^2 – b^2$ na činioce pa nisu bili u mogućnosti da rešavanjem jednačine $a^2 – b^2 = 53$ dođu do rešenja ovog zadatka.

Zatim su zadata još dva slična zadatka:

5) Kolika je razlika između 101. i 100. trougaonog broja?

Sve grupe su uspešno rešile ovaj zadatak primenjujući rezone i postupak iz prethodnih zadataka. Došli su do zaključka da je

stoti trougaoni broj: $X = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100$

sto prvi: $Y = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100 + 101$

pa je njihova razlika 101.

6) Kolika je razlika između 50-og kvadratnog i 50-og trougaonog broja?

Pri rešavanju ovog zadatka većina grupa je zaključila da je 50-ti kvadratni broj 50^2 tj. 2500 a 50-ti trougaoni broj su izračunali analogno prethodnom zadatku (50-ti trougaoni broj je 1275). Zatim su dobili rezultat: 2500 – 1275 = 1225.

Potom su zadati zadaci sa nizovima brojeva koji nisu trougaoni niti kvadratni:

7) Dat je niz brojeva

   3 , 9 , 15 , 21 , 27 , 33 , 39 . . .

   Odrediti 80-ti član ovog niza.

   Većina grupa je uočila da se susedni brojevi u nizu razlikuju za 6 pa su rešenje dobili primenom postupka iz prethodnih zadataka:

   $X_2 = 3 + 6$

   $X_3 = 9 + 6 = 3 + 6 + 6 = 3 + 2 \cdot 6$

   $X_4 = 15 + 6 = 3 + 2 \cdot 6 + 6 = 3 + 3 \cdot 6$

   . . .

   $X_{80} = 3 + 79 \cdot 6 = 3 + 474 = 477$

8) Napisati još 5 elemenata sledećeg niza brojeva:

   4 , 7 , 12 , 19 , 28 , 39 , 52 . . . .

   Za ovaj zadatak smo dobili više tačnih odgovora u odnosu na prethodni. Trebalo je samo uočiti da razlike dva susedna člana čine niz neparnih brojeva:

   4 , 7 , 12 , 19 , 28 , 39 , 52 . . .

   \ / \ / \ / \ / \ / \ /

   3 , 5 , 7 , 9 , 11 , 13 . . . pa se zatim formiraju sledeći članovi dodavanjem narednih neparnih brojeva

52 67 84 103 124 147

\ / \ / \ / \ / \ /
+15 +17 +19 + 21 +23

Ovim zadatkom je završen naš rad sa grupama i učenici su se potom vratili uobičajenim nastavnim sadržajima. Nakon mesec dana ponovili smo zadatke sa pred-testa i dobijene rezultate uporedili sa ranije dobijenim rezultatima.

3. REZULTATI I DISKUSIJA

Zadaci na pred-testu i post-testu koji su obuhvaćeni ovom analizom:

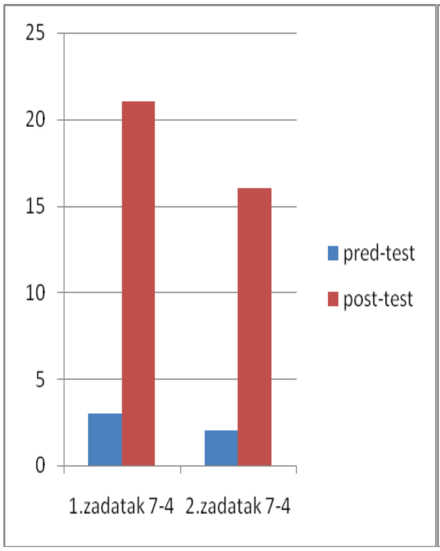
1) Izračunati zbir prvih 1000 prirodnih brojeva.
2) Izračunati zbir svih neparnih brojeva manjih od 100.
   Vreme uzrade: 10 minuta.

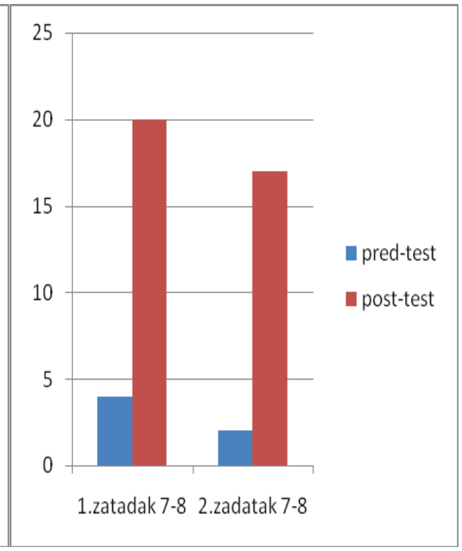
Analizirani su rezultati u odeljenjima 7_4 i 7_8 koja su bila obuhvaćena eksperimentom.
U Tabeli 1. prikazani su rezultati na pred-testu i post-testu. Od 31-og učenika odeljenja 7_4 na pred-testu 3 učenika su uradila prvi zadatak i 2 učenika drugi zadatak a na post-testu prvi zadatak je uradio 21 učenik a drugi 16 učenika. U odeljenju 7_8 prvi zadatak na pred-testu je uradilo 4 učenika a drugi 2 učenika dok je na post-testu prvi zadatak uradilo 20 učenika a drugi 17 učenika.

Tabela 1. Broj tačnih odgovora na pred-testu i post-testu

Odeljenje	Broj učenika	Broj tačnih odgovora na pred-testu		Broj tačnih odgovora na post-testu	
		Zadatak 1	Zadatak 2	Zadatak 1	Zadatak 2
7_4	31	3	2	21	16
7_8	30	4	2	20	17

Dobijeni rezultati pokazuju da je rad sa nizovima trougaonih i kvadratnih brojeva dao dobre rezultate. Ako pogledamo grafički prikaz ovih rezultata učinak dvočasovnog rada sa pomenutim brojevima je još očigledniji i uočljiviji (Slika 3.).





Slika 3. Histogram broja urađenih zadataka na pred-testu i post-testu u 7_4 i 7_8

3. ZAKLJUČAK

Ispitivanje osposobljenosti učenika 6. i 7. razreda osnovne škole da primenom vizuelno-logičkog pristupa u rešavanju zadaka, povezivanjem elemenata i uočavanjem zakonitosti, dolaze do rešenja zadatog problema, pokazalo je da su učenici veoma malo ili nimalo naučeni na takav pristup. Organizovali smo dvočasovno upoznavanje učenika sa trougaonim i kvadratnim brojevima i rešavanje raznih zadataka sa brojnim nizovima. Osnovne zakonitosti koje važe za ove brojeve učenici su radeći u grupama, bez pomoći nastavnika, uočili i zaključili. Saradnički rad je dao odlične rezultate. Učenici koji su brže uočavali zakonitosti predočavali su ih drugim članovima grupe što je doprinelo njihovom bržem napredovanju u ovladavanju planiranim sadržajima. Kada su učenici ponovo samostalno rešavali zadatke na post-testu, bili su znatno uspešniji u odnosu na pred-test.

Pokazali smo kako postupci koji se koriste u radu sa trougaonim i kvadratnim brojevima mogu biti paradigme za rešavanje raznih zadataka sa brojnim nizovima. U razgovoru sa učenicima, tokom i nakon eksperimenta, saznali smo da im je rad sa ovim brojevima bio interesantan i lak a rezultati pokazuju da je bio i delotvoran. Učenicima su figurativni brojevi interesantni zbog svoje slikovne prezentacije a zakonitosti koje za njih važe su jednostavne i lako razumljive.

Uzimajući u obzir iskaze učenika kao i rezultate uspešnosti učenika u rešavanju zadataka na pred-testu i post-testu, možemo zaključiti da je rad sa trougaonim i kvadratnim brojevima višestruko koristan. Kroz rešavanje zadataka učenici su naučili da određuju sume nizova brojeva, da dopunjuju nizove nedostajućim članovima, da određuju proizvoljan član u nizu.

Možemo zaključiti da su odabrani postupci korisne paradigme za rad sa nizovima brojeva i takođe da je prikazano učenje kroz rešavanje zadataka efikasna paradigma učenja. Nastavljamo ovaj rad sa prikupljanjem dodatnih podataka uz proširivanje na veći broj učenika, veći broj figurativnih brojeva i većim primenama u zadacima.

4. REFERENCE

[1] King, B. (2007). *Max Wertheimer & Gestalt theory*, Somerset, Transaction Publishers.
[2] Wang, M., Wu, B., Kinshuk, Chen, N.-S., & Spector, J. M. (2013). Connecting problem-solving and knowledge-construction processes in a vizualization-based learning environment. *Computers & Education,* 68, 293-306.
[3] Iran-Nejad, A. (1995). *Constructivism as substitute for memorization in learning: meaning is created by learner*. *Education*, 116, 16-32.
[4] Schcolnik, M., Kol, S., & Abarbanel, J. (2016). *Constructivism in theory and in practise.*In *English Teaching Forum* (Vol.44, No.4, pp.12-20). US Department of State. Bureau of Educational and Cultural Affairs, Office of English Language Programs, SA-5, 2200 C Street NW 4th Floor, Washington, DC 20037.
[5] McPhail, G. (2015). The fault lines of recontextualisation: the limits of constructivism in education. *British Educational Research Journal*.
[6] Deza, E., & Deza, M. (2012). *Figurate Numbers*. World Scientific.
[7] Kagan, S. (1994). *Cooperative learning*. San Clemente, CA: Resources for Teachers, Inc.
[8] Dooly, M. (2008). Constructing knowledge together. In M. Dooly (Ed.), *Telecollaborative language learning. A guidebook to moderating intercultural collaboration online* (pp.21-24). Bern: Peter Lang.
[9] Chai, C., Lin, W.-Y., So, H.-J., & Cheah, H.M. (2011). *Advancing collaborative learning with ICT: Conception, cases and design.* Singapore: Ministry of Education.
[10] Laal, M., & Ghodsi, S. M.(2012). Benefits of collaborative learning. *Procedia-Social and Behavioral Science, 31,* 486-490.
[11] Dogru, & Kalender, (2007). Applying the subject 'cell' through consructivist approach during science lessons and the teacher's view. *Journal of Environmental & Science Education,* 2(1), 3-13.