UDK: 004.42:531/534 Stručni rad

PRIMER PRIMENE PROGRAMIRANJA U NASTAVI MEHANIKE

PROGRAMMING EXAMPLE IN THE TEACHING MECHANICS

Stanimir Čajetinac[1], Milica Todorović[2], Ivana Terzić[3]
[1,2,3]*Visoka tehnička mašinska škola strukovnih studija, Trstenik*
[1]stanimir.cajetinac@ vtmsts.edu.rs, [2]milica.todorovic@vtmsts.edu.rs,
[3]ivana.aa.terzic@gmail.com

Rezime: *Jednačine kosog hica u vakuumu su jednostavne i mogu se rešiti na više načina. Međutim, ako se uzme u obzir više uticajnih veličina (otpor vazduha, promena gravitacije sa visinom, promena temperature i gustine vazduha...), jednačine su složenije i zahtevaju numeričko rešavanje.*
U radu je dat pristup programskog rešavanja, gde se primenom programskog paketa MATLAB dobijaju familije rešenja, koje omogućuju jednostavnu analizu uticajnih veličina i zadovoljenje traženih zahteva.
Ključne reči: *Kosi hitac, programiranje, analiza putanje.*

Abstract: *Equations for projectile motion in the vacum are simple and can be solved in multiple ways. However, when we take into account other influences (air resistance, gravity shift depending on the height of a projectile, temperature changes, air density, etc.) equations become more complex and they require numerical solution.*
In this paper, we have given programatic approach for solving this problem, where we use MATLAB in order to get families of solutions, which enable us simple analysis of significant parameters and meet the required demands.
Key words: *projectile motion, programming, trajectory analysis*

1. UVOD

Pod kosim hicem se podrazumeva kretanje tela u gravitacionom polju Zemlje, koje je izbačeno početnom brzinom pod nekim uglom u odnosu na horizontalnu ravan (ravan Zemlje). Kosi hitac ima dugu istoriju proučavanja, počevši od Leonarda da Vinčija, Galilea, Njutna do Meščerskog i Ciolkovskog. Veliko interesovanje za ovaj problem proističe iz njegovog značaja, posebno u vojnoj tehnici. Naime, kretanje projektila izbačenog iz topa, kao i rakete posle prestanka rada raketnog motora predstavlja kosi hitac. Rezultati izučavanja kosog hica danas se primenjuju i u sportu za poboljšanje rezultata bacačkih disciplina atletike (koplje, disk, kugla...).

Idealni kosi hitac uzima u obzir samo početne uslove (brzinu i ugao) i dejstvo gravitacije pa zbog toga ima samo ilustrativni značaj. Ako se uzme u obzir otpor vazduha kao jedan od najuticajnih faktora, dobijaju se jednačine koje više odgovaraju realnom kretanju, ali su složenije za rešavanje.

Stvarna primena kosog hica za rešavanje balističkih problema, može dovesti do daljeg usložnjavanja jednačina uzimanjem u obzir promene veličine i pravca gravitacionog ubrzanja, uticaja meteoroloških faktora, Koriolisove sile, itd.

Numeričkim metodama mogu se dobiti rešenja za konkretan skup parametara jednačina i sagledati koji su faktori najuticajniji na domet i visinu kosog hica.

2. KRETANJE TELA U VAKUUMU (BEZ OTPORA VAZDUHA)

U narednoj analizi kretanja uzimaju se u obzir tri pretpostavke:
1) otpor sredine se zanemaruje;
2) maksimalna visina koju dostiže telo je daleko manja od poluprečnika Zemlje pa se intenzitet vektora gravitacionog ubrzanja može smatrati konstantnim;
3) dužina putanje je daleko manja od obima Zemlje pa se pravac vektora gravitacionog ubrzanja ne menja.

Jednačine kosog hica u bezvazdušnom prostoru, tj. jednačine kretanja materijalne tačke izbačene sa početnog položaja $M_0\ (a,b)$ u horizontalnoj ravni Oxy početnom brzinom v_0, pod uglom α u odnosu na horizontalnu ravan i uglom β u odnosu na osu Ox, glase [1], [2], [3]:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha\ \cos\beta + a \\ y(t) &= v_0 t \cos\alpha\ \sin\beta + b \\ z(t) &= v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Iz uslova da je koordinata z jednaka nuli može se odrediti vreme do pada tačke na horizontalnu ravan, po obrascu:

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{2}$$

Koordinate tačke $M\ (x_M, y_M)$ u kojoj se završava kosi hitac, računaju se na osnovu tog vremenskog trenutka i određene su relacijama:

$$x_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\cos\beta + a \qquad y_M = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\sin\beta + b \tag{3}$$

Rastojanje tačke M od početnog položaja M_0 računa se po narednom obrascu i predstavlja domet d :

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \tag{4}$$

Maksimalna visina penjanja (iz uslova da je komponenta brzine v_z u najvišoj tački jednaka nuli) određena je obrascem:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \tag{5}$$

Koristeći jednačine (1) – (5) može se napisati MATLAB program za određivanje traženih veličina [4], [5]. U programu se prvo zadaju početni uslovi: početni položaj M_0 *(a,b)*, početna brzina v_0 i početni uglovi α i β. Diferenciranjem jednačina kretanja određuju se komponente brzine a po navedenim obrascima određuju se koordinate tačaka putanje, domet i visina penjanja. Na kraju programa se nalaze naredbe za štampanje traženih rezultata, naredbe za crtanje putanje kao i dijagrama promene komponenti brzine i ukupne brzine tokom vremena leta.

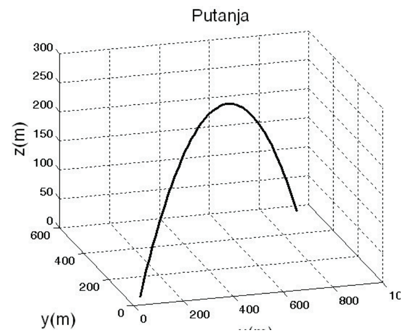
Zadavanjem brojnih podataka u programu:

Unesite pocetnu brzinu v0(m/s):100
Unesite ugao (elevaciju) (stepeni):45
Unesite ugao (azimut) (stepeni):30
Unesite pocetnu x koordinatu(m):50
Unesite pocetnu y koordinatu(m):50

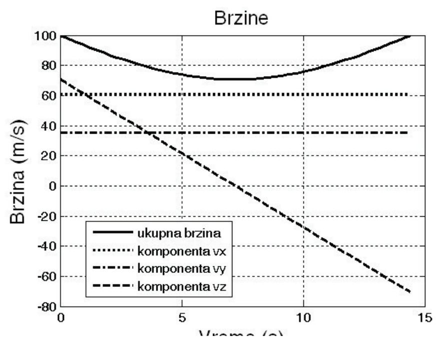
dobijaju se numerički rezultati za vreme trajanja leta, domet, visinu i koordinate tačke pada.

Vreme do pada na zemlju: 14.42s
Domet: 1019.37m
Maksimalna visina: 254.84m
Koordinate pada (x,y): 932.80m, 559.68m

Rezultati rada programa u obliku dijagrama prikazani su na narednim slikama, i to: na slici 1 prikazana je putanja kosog hica a na slici 2 brzina i njene komponente.



Slika 1. Putanja kosog hica

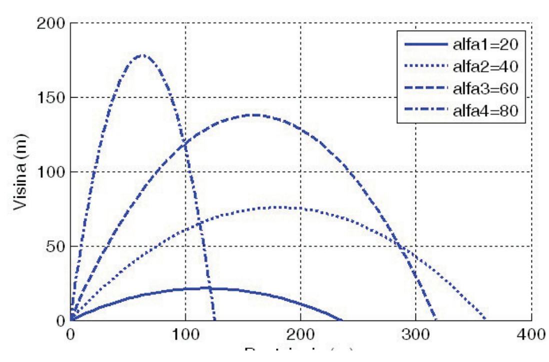


Slika 2. Brzina i njene komponente

Komponente brzine v_x i v_y su konstantne tokom čitavog kretanja, jednake komponentama početne brzine v_{0x} i v_{0y}, respektivno (slika 2). Komponenta v_z od svoje početne pozitivne vrednosti v_{0z} linearno opada do nule (u najvišoj tački putanje) a zatim raste u suprotnom smeru do v_{0z}. Ukupna brzina se od svoje zadate početne vrednosti $v_0=100$ *m/s* nelinearno smanjuje do minimuma u najvišoj tački putanje da bi zatim ponovo rasla i do kraja kretanja dostigla svoju početnu veličinu.

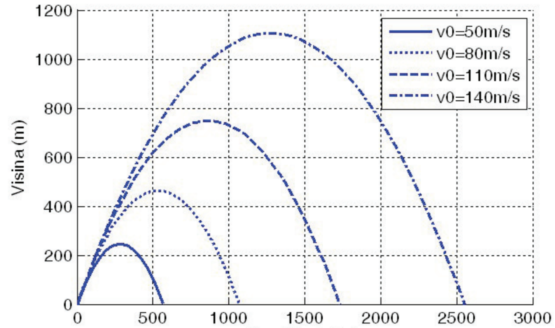
Jednačine (1) do (5) primenjuju se i za opisivanje kosog hica u ravni. Pri tome treba zadati da je ugao $\beta=0^0$, i ako kretanje započinje iz koordinatnog početka koordinate početne tačke M_0 su jednake nuli.

Ilustrativno je pokazati familiju putanja kosog hica u ravni, za različite vrednosti početnog ugla α (slika 3). Sa dijagrama se vidi promena putanje (dometa i dostignute visine). Za male početne uglove izraženiji je domet u odnosu na visinu (do ugla $\alpha=45^0$ za koji domet ima maksimalnu vrednost), dok se sa povećanjem početnog ugla preko 45^0, smanjuje domet ali se povećava visina penjanja.



Slika 3. Familija putanja kosog hica za različite početne uglove

Putanja kosog hica u ravni, se menja za različite vrednosti početne brzine v_0 (slika 4).



Slika 4. Familija putanja kosog hica za različite početne brzine

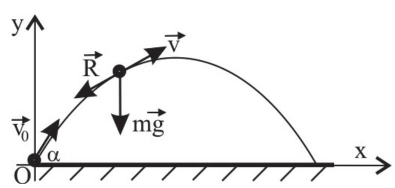
Očekivano, sa povećanjem početne brzine let materijalne tačke duže traje a domet i visina penjanja dostižu veće vrednosti, kao što pokazuje slika 4.

3. KRETANJE TELA SA OTPOROM VAZDUHA

Kretanju kuglice mase *m* koja je izbačena koso sa Zemljine površine iz položaja $M_0\,(0,0)$, tako da su komponente početne brzine v_{0x} i v_{0y}, suprotstavlja se otpor vazduha proporcionalan brzini (koeficijent otpora *k*), $\vec{R} = -km\vec{v} = -km\left(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}\right)$.

Na osnovu jednačina krivolinijskog kretanja, prema slici 5, mogu se napisati jednačine:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -km\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -km\dot{y} - mg \end{aligned} \tag{6}$$



Slika 5. Kosi hitac sa otporom vazduha

Ako su zadate početne vrednosti $\dot{x}_0 = v_{0x} = 70{,}7m/s$; $\dot{y}_0 = v_{0y} = 70{,}7m/s$ i koeficijent otpora k=0,02, njihovom zamenom u jednačine (6) dobija se:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -0{,}02\dot{x} \\ \ddot{y} &= -0{,}02\dot{y} - 9{,}81 \end{aligned} \tag{7}$$

U slučaju da se kretanje odvija u vakuumu, tj. bez otpora vazduha jednačine (7) dobijaju oblik:

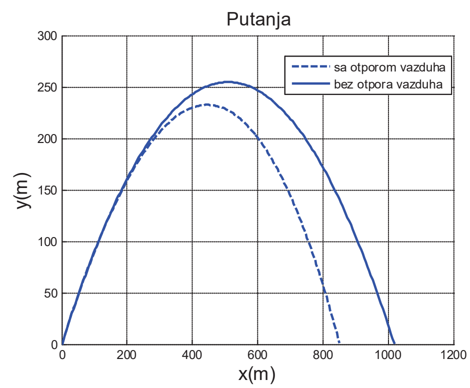
$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= -9{,}81 \end{aligned} \qquad (8)$$

Ovde su dati elementi programa [5] koji može da se napiše na osnovu jednačina (7), (8) i početnih uslova.

```
x = dsolve('D2x=-0.02*D1x','D1x(0)=70.7','x(0)=0');
y = dsolve('D2y=-0.02*D1y-9.81','D1y(0)=70.7','y(0)=0');
x1 = dsolve('D2x1=0','D1x1(0)=70.7','x1(0)=0');
y1 = dsolve('D2y1=-9.81','D1y1(0)=70.7','y1(0)=0');

t=linspace(0,tk,200);
s1=subs(x1,'t', td);
h1=subs(y1,'t', td);
s=subs(x,'t', td);
h=subs(y,'t', td);

% Crtanje dijagrama
plot(s,h,'-.','LineWidth',2);
plot(s1,h1,'LineWidth',2);

% Stampanje rezultata
fprintf('\nVreme leta u vakuumu: %6.3fs',t(200));
fprintf('\nDomet u vakuumu: %6.3fm',s1(200));
fprintf('\nVreme leta sa otporom vazduha: %6.3fs',t(j));
fprintf('\nDomet sa otporom vazduha: %6.3fm\n',s(j));
```

Rezultati rada ovog programa, za obe varijante kretanja, su brojni rezultati za vreme leta i domet i grafički prikaz putanja za kretanje sa i bez otpora vazduha (slika 6).

Vreme leta u vakuumu: 14.410s
Domet u vakuumu: 1018.787m
Vreme leta sa otporom vazduha: 13.758s
Domet sa otporom vazduha: 850.358m



Slika 6. Putanje kosog hica sa i bez otpora vazduha

Sa slike se vidi da domet i visina penjanja, kao i vreme kretanja, kod putanje sa otporom vazduha (takozvana balistička kriva), imaju manje vrednosti nego pri kretanju kada se otpor vazduha zanemaruje.

4. ZAKLJUČAK

Pristup numeričkog rešavanja jednačina kosog hica je dobar primer primene programiranja u nastavi.

Korišćenje MATLAB-a kao alata omogućilo je rešavanje diferencijalnih jednačina koje opisuju kosi hitac sa otporom vazduha, što je mnogo jednostavnije nego rešavanje uobičajenim, analitičkim putem. Osim toga ovaj pristup omogućuje grafičke prikaze familije rešenja kako bi se bolje sagledali uticaji pojedinih parametara na domet i visinu kosog hica.

LITERATURA

[1] Targ, S. M. (1971). *Kratki kurs teorijske mehanike*, Građevinska knjiga, Beograd.

[2] Pivko, S., (1974), Mehanika III - Dinamika, Naučna knjiga, Beograd.

[3] Andrejev, V. (1971). *Mehanika III. deo*, *Dinamika*, Tehnička knjiga, Zagreb.

[4] Etter D., Kuncicky D., Moore H. (2005). *Uvod u MATLAB 7*, CET Computer Equipment and Trade, Beograd.

[5] Todorović, M., Čajetinac, S., (2016), Mehanika kroz inženjersko programiranje, Visoka tehnička mašinska škola strukovnih studija, Trstenik.